МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
математической физики
и информационных технологий

С.А. Переселков

17.06.2023г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.20 Уравнения математической физики

1. Код и наименование специальности:

14.05.02 Атомные станции: проектирование, эксплуатация и инжиниринг.

2. Специализация:

Проектирование и эксплуатация атомных станций.

3. Квалификация выпускника: инженер-физик

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

0803 кафедра математическойфизики и информационных технологий

6. Составители программы:, д.ф.-м.н., доцент, профессор, Чернов Владислав Евгеньевич

7. Рекомендована: Научно-методическим советом физического факультета, протокол № 6 от 14.06.2023г.

8. Учебный год: 2025/2026 **Семестр(ы):** 5

9.Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- формирование представлений о дифференциальных уравнениях в частных производных, методах отыскания их решений и свойствах этих решений;
- знакомство с современным математическим языком (например, обобщённых функций и простейших понятий функционального анализа) и умение формулировать на нём задачи современных естественных наук и технологий;
- воспитание общей математической культуры, развитие математической интуиции и понимания места и роли математической физики в системе математических наук;
- формирование личности студента, развитие его интеллекта, способностей к логическому и алгоритмическому мышлению.

Задачи учебной дисциплины:

- освоение аналитических (точных и приближённых) и численных методов решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных, возникающих в задачах современных естественных наук и технологий;
- демонстрация эффективности методов математической физики как одного из средств математического моделирования, а также роли математики в прикладных исследованиях.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Входит в модуль «Математика» обязательной части Б1. Изучение дисциплины проводится на базе общих курсов (математический анализ, аналитическая геометрия, линейная алгебра, векторный и тензорный анализ, дифференциальные уравнения) с учётом требований к уровню подготовки, необходимых для освоения основной образовательной программы.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен использовать базовые знания естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования	ОПК-1.1	Знает основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функции комплексного переменного, теории вероятностей и математической статистики	Демонстрирует знания фундаментальных законов природы и основных физических и математических законов.
		ОПК-1.8	Владеет методами аналитического и численного решения алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики	При решении практических задач и структурировании естественно-научной информации исходит из современных концепций и достижений естественных наук.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (*в соответствии с учебным планом*) — 4/144.

Форма промежуточной аттестации*(зачет/экзамен)* экзамен

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			5 семестр
Аудиторные занятия		68	68
в том числе:	лекции	34	34
	практические		
	лабораторные	34	34
Самостоятельная работа		40	40
в том числе: курсовая работа (проект)		0	0
Форма промежуточной аттестации *(экзамен – час.)*		36	36
Итого:		144	144

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Некоторые понятия и предложения теории множеств, теории функций и теории операторов	Точечные множества в R^n. Классы функций. Пространства функций. Гильбертовы пространства. Ортонормальные системы. Полнота. Базис. Линейные операторы и функционалы. Ядро и образ. Обратный оператор. Ограниченные операторы. Линейные уравнения. Эрмитовы операторы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
1.2	Основные уравнения математической физики, их вывод и классификация	Уравнение колебаний. Уравнение диффузии и теплопроводности. Стационарное уравнение. Уравнения газогидродинамики и тепломассопереноса. Уравнение Максвелла. Уравнение Шрёдингера. Классификация уравнений в точке. Характеристические поверхности (характеристики). Канонический вид уравнений с двумя независимыми переменными (эллиптический, гиперболический, параболический).	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
1.3	Постановка основных краевых	Классификация краевых задач. Задача Коши. Краевая задача для уравнений	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193

	задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка	эллиптического типа. Смешанная задача. Другие краевые задачи. Корректность постановок задач математической физики. Теорема Коши-Ковалевской. Классические и обобщенные решения.	
1.4	Обобщенные функции и операции с ними	Пространство D основных и D’ обобщённых функций. Носитель обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Замена переменных в обобщенных функциях. Умножение обобщенных функций. Производные обобщенной функции. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций. Пространство S основных функций и S’ обобщенных функций медленного роста S'. Преобразование Фурье основных функций из S и обобщенных функций из S'. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье свертки.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
1.5	Фундаментальное решение и задача Коши	Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов. Уравнения с правой частью. А50). 6. Фундаментальное решение операторов теплопроводности, волнового, Лапласа и Гельмгольца. Поверхностные и объемные волновые потенциалы. Обобщенная задачи Коши для волнового уравнения. Распространение волн. Диффузия волн и принцип Гюйгенса. Поверхностный и объемный тепловой потенциал. Обобщенная задачи Коши для уравнения теплопроводности.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
1.6	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	Постановка задачи на собственные значения. Тождества Лагранжа и (формулы) Грина. Свойства оператора L = div(p grad) +q. Свойства и физический смысл собственных значений и собственных функций оператора L. Задача Штурма-Лиувилля: функция Грина и сведение к интегральному уравнению. Теорема Стеклова. Гармонические функции. Теорема о среднем арифметическом. Принцип максимума. Элементы теории потенциала. Функция Грина задачи Дирихле. Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
1.7	Специальные функции	Определение и простейшие свойства функций Бесселя. Ортогональность и рекуррентные соотношения для функций Бесселя. Корни функций Бесселя. Полнота функций Бесселя. Определение сферических функций. Дифференциальное уравнение для сферических функций. Полиномы Лежандра.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193

		Производящая функция. Присоединенные функции Лежандра.	
1.8	Смешанная задача	Общая схема метода Фурье. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа. Интеграл энергии. Смешанная задача для уравнения параболического типа. Принцип максимума.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
2. Практические занятия			
2.1	Некоторые понятия и предложения теории множеств, теории функций и теории операторов	Точечные множества в R^n. Классы функций. Пространства функций. Гильбертовы пространства. Ортонормальные системы. Полнота. Базис. Линейные операторы и функционалы. Ядро и образ. Обратный оператор. Ограниченные операторы. Линейные уравнения. Эрмитовы операторы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
2.2	Основные уравнения математической физики, их вывод и классификация	Уравнение колебаний. Уравнение диффузии и теплопроводности. Стационарное уравнение. Уравнения газогидродинамики и тепломассопереноса. Уравнение Максвелла. Уравнение Шрёдингера. Классификация уравнений в точке. Характеристические поверхности (характеристики). Канонический вид уравнений с двумя независимыми переменными (эллиптический, гиперболический, параболический).	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
2.3	Постановка основных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка	Классификация краевых задач. Задача Коши. Краевая задача для уравнений эллиптического типа. Смешанная задача. Другие краевые задачи. Корректность постановок задач математической физики. Теорема Коши-Ковалевской. Классические и обобщенные решения.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
2.4	Обобщенные функции и операции с ними	Пространство D основных и D’ обобщённых функций. Носитель обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Замена переменных в обобщенных функциях. Умножение обобщенных функций. Производные обобщенной функции. Прямое произведение и свёртка обобщенных функций. Пространство S основных функций и S’ обобщенных функций медленного роста S'. Преобразование Фурье основных функций из S и обобщенных функций из S'. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье свертки.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
2.5	Фундаментальное решение и задача Коши	Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов. Уравнения с правой частью. А50). 6. Фундаментальное решение операторов теплопроводности, волнового, Лапласа и Гельмгольца. Поверхностные и объемные волновые	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193

		потенциалы. Обобщенная задачи Коши для волнового уравнения. Распространение волн. Диффузия волн и принцип Гюйгенса. Поверхностный и объемный тепловой потенциал. Обобщенная задачи Коши для уравнения теплопроводности.	
2.6	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	Постановка задачи на собственные значения. Тождества Лагранжа и (формулы) Грина. Свойства оператора L = div(p grad) +q. Свойства и физический смысл собственных значений и собственных функций оператора L. Задача Штурма-Лиувилля: функция Грина и сведение к интегральному уравнению. Теорема Стеклова. Гармонические функции. Теорема о среднем арифметическом. Принцип максимума. Элементы теории потенциала. Функция Грина задачи Дирихле. Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
2.7	Специальные функции	Определение и простейшие свойства функций Бесселя. Ортогональность и рекуррентные соотношения для функций Бесселя. Корни функций Бесселя. Полнота функций Бесселя. Определение сферических функций. Дифференциальное уравнение для сферических функций. Полиномы Лежандра. Производящая функция. Присоединенные функции Лежандра.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193
2.8	Смешанная задача	Общая схема метода Фурье. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа. Интеграл энергии. Смешанная задача для уравнения параболического типа. Принцип максимума.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29193

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Некоторые понятия и предложения теории множеств, теории функций и теории операторов	4	2		4	10
2	Основные уравнения математической физики, их вывод и классификация	4	2		4	10
3	Постановка основных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка	2	2		4	8
4	Обобщенные функции и	8	6		6	20

	операции с ними					
5	Фундаментальное решение и задача Коши	4	6		6	16
6	Краевые задачи для уравнений эллиптического типа	4	6		6	16
7	Специальные функции	4	2		4	10
8	Смешанная задача	4	8		6	18
	Итого:	34	34		40	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Необходимо после каждой лекции разбирать и осваивать материал по ее теме, для лучшего понимания читать рекомендованную основную и дополнительную литературу, готовиться к практическому занятию, разбирая соответствующий теоретический материал, систематически выполнять домашние задания, выполнять текущие тестирования (контрольные работы) по пройденному теоретическому и практическому материалу

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики: задачник / Владимиров В.С., Михайлов В.П., Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – Москва: Физматлит, 2016. — 520 с. — Сборник задач по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] / Владимиров В.С., Михайлов В.П., Михайлова Т.В., Шабунин М.И. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – ISBN 5-9221-1692-3. — <URL: https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922116923.html>.
2	Карчевский М. М. Лекции по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] / Карчевский М. М. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 164 с. – Книга из коллекции Лань - Математика. – ISBN 978-5-8114-2132-9. – <URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=72982>.
3	Емельянов В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач [Электронный ресурс] / Емельянов В. М., Рыбакина Е. А. – 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2016. — 216 с. — Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки «Техническая физика» и «Прикладная механика». – Книга из коллекции Лань - Физика. – ISBN 978-5-8114-0863-4. — <URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=71748>.
4	Некоторые аспекты современных методов уравнений математической физики [Электронный ресурс]: [учебное пособие] :/ Воронеж. гос. ун-т; [сост.: Л.Н. Ляхов и др.]. – Электрон. текстовые дан. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. – Загл. с титул. Экрана. – Свободный доступ из интрасети ВГУ. – Текстовые файлы. – Windows 2000; Adobe Acrobat Reader. – <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m16-223.pdf>.
5	Деревич И. В. Практикум по уравнениям математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие / Деревич И. В. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург:

	Лань, 2018. – 428 с. – Книга из коллекции Лань - Физика. – ISBN 978-5-8114-2601-0 .— <URL: https://e.lanbook.com/book/104942>.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Горюнов А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах. 2 / А.Ф. Горюнов. – Москва: МИФИ, 2008. – 528 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=231600)
2	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики: учебник. – М.: Физматлит, 2013. — 352 с. (ЭБС «Университетская библиотека online» http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=59660)
3	Владимиров В.С. Уравнения математической физики: учебник / Владимиров В.С., Жаринов В.В. — Москва: Физматлит, 2008. — 400 с. — Уравнения математической физики [Электронный ресурс]: Учеб. для вузов. / Владимиров В.С, Жаринов В.В. - 2-е изд., стереотип. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – ISBN 5-9221-0310-7. — https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922103107.html
4	Треногин В.А. Методы математической физики: практикум / Треногин В.А., Недосекина И.С. – Москва: МИСиС, 2012. – 196 с. – Методы математической физики [Электронный ресурс]: практикум / В.А. Треногин, И.С. Недосекина. - М.: МИСиС, 2012. – ISBN 5-87623-611-1. – https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785876236111.html
5	Кошляков Николай Сергеевич. Уравнения в частных производных математической физики: учебное пособие для студ. мех. -мат. и физ. фак. ун-тов / Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. — М.: Высшая школа, 1970. — 710 с.
6	Тихонов Андрей Николаевич. Уравнения математической физики : учебник для студ. физ.-мат. специальностей ун-тов / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .– 7-е изд. – М. : Изд-во Моск. ун-та : Наука, 2004 .– 798 с. : ил., табл. – (Классический университетский учебник / редсов.: В.А. Садовничий (пред.) [и др.]) .– Библиогр.: с.791 .– Предм. указ.: с.792-798. — ISBN 5-211-04843-1. — ISBN 5-02-033599-1
7	Ильин А.М. Уравнения математической физики: учебное пособие / Ильин А.М. – Москва: Физматлит, 2009. – 192 с. – Уравнения математической физики [Электронный ресурс] / Ильин А.М. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – ISBN 5-9221-1036-5. — 8 <URL:https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110365.html>.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)***:**

№ п/п	Ресурс
1.	www.lib.vsu.ru - ЗНБ ВГУ
2.	http://e.lanbook.com/ - ЭБС «Лань»
3.	http://www.book.ru/ - ЭБС «Book.ru»

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

Организация самостоятельной работы студентов : методические рекомендации для преподавателей вузов / Ю.А. Гончарова ; Воронеж. гос. ун-т .– Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2007 .– 28 с., табл. – Библиогр.: с. 26-28 .– <URL:http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m07-202.pdf>.

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации дисциплины могут применяться электронные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru для освоения лекционного материала, для предоставления домашних заданий для просмотра и оценки преподавателем, для проведения текущего контроля и текущей аттестации.
https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=9819
Электронные средства для представления презентаций

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Большая физическая аудитория им. М.А. Левитской (для проведения занятий лекционного типа, текущего контроля и промежуточной аттестации)
Специализированная мебель, ноутбук, проектор, экран для проектора на штативе
Microsoft Windows 10, LibreOffice, Adobe Reader (бесплатное и/или свободное ПО
Компьютерный класс, аудитория для групповых и индивидуальных консультаций, помещение для самостоятельной работы
Специализированная мебель, компьютеры с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета
Microsoft Windows 10, LibreOffice, Adobe Reader

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	1.1-1.8 2.1-2.8	ОПК-1	ОПК-1.1	КИМ
			ОПК-1.8	КИМ
Промежуточная аттестация форма контроля - экзамен				Перечень вопросов Практическое задание

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины, осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме(ах) письменного опроса и контрольных работ. Критерии оценивания приведены выше.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.
Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний. При оценивании используются качественные шкалы оценок.

Необходимо знать, уметь записать и решать основные классы уравнений математической физики. Владеть языком функциональных пространств, операторов, функционалов, обобщённых функций. Уметь решать задачи Коши для уравнений колебаний и теплопроводности. Уметь решать задачу Штурма-Лиувилля,а также краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в прямоугольнике, круговом/кольцевом секторе, шаровом сегменте. Владеть основными приёмами работы со спецфункциями.

Критерии оценок:
Отлично - подробные и безошибочные ответы на основные и дополнительные вопросы.
Хорошо - подробные ответы на поставленные вопросы с мелкими ошибками.
Удовлетворительно - неудовлетворительные ответы на один из основных и некоторые дополнительные вопросы.
Неудовлетворительно - плохое знание материала, неудовлетворительные ответы на большинство поставленных вопросов.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

<u>Перечень вопросов к экзамену:</u>

1. Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными. Каноническая форма уравнений.
2. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными.
3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Частные методы нахождения общего решения канонической формы.
4. Решение задачи Коши для уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными.
5. Уравнения с частными производными в физических задачах на примерах колебательных процессов, диффузии и теплопроводности, стационарных процессов.
6. Постановка начальных и краевых задач для уравнений математической физики.
7. Задача Коши. Задача Штурма - Лиувилля.
8. Корректность постановки задач математической физики.
9. Задача Коши для одномерного однородного и неоднородного уравнения Даламбера. Формула Даламбера. Принцип Дюамеля.
10. Метод Даламбера для полупрямой и конечного отрезка.
11. Ортогональные системы функций. Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения, спектр собственных значений, собственные функции и их свойства.
12. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с однородными граничными условиями. Метод Фурье.

13. Смешанная задача для одномерного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями. Метод Фурье.
14. Решение смешанной задачи для одномерного неоднородного волнового уравнения с неоднородными граничными условиями методом разделения переменных.
15. Решение смешанной задачи для одномерного неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями методом разделения переменных.
16. Разделение переменных в уравнениях Лапласа и Гельмгольца в прямоугольной области при решении задач Дирихле и Неймана.
17. Решение первой и второй краевых задач для круга методом разделения переменных. Представление решения в виде интегралов Пуассона и Дини.
18. Нахождение гармонической функции в кольце и круговом секторе методом разделения переменных.
19. Решение задачи о колебаниях прямоугольной мембраны методом Фурье.
20. Применение операционного метода (интегрального преобразования Лапласа) при решении дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка гиперболического и параболического типов.
21. Метод функции Грина при решении уравнений эллиптического и параболического типов.
22. Дельта-функция и ее свойства.
23. Свойства функции Грина.
24. Формулы Грина.
25. Решение задачи Дирихле для круга и полуплоскости методом функции Грина.
26. Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности и решение ее с помощью функции Грина (формула Пуассона).
27. Решение задачи Коши для уравнения Даламбера методом спуска в 2-х мерном пространстве (формула Пуассона).
28. Основные и обобщенные функции. Свойства обобщенных функций и действия над ними. Дельта-функция Дирака и ее свойства.
29. Дельтаобразные последовательности. Гамма- и бета- функции. Определения и основные свойства.
30. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого рода и их свойства. Функции Бесселя второго порядка и их линейная независимость.
31. Общее решение уравнения Бесселя для произвольных значений индекса. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя. Функции Бесселя полуцелого индекса. Функции Бесселя 3-го рода. Уравнение Бесселя с параметром.
32. Модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Задача Штурма-Луивилля для уравнения Бесселя. Ряды Фурье-Бесселя и Дини.
33. Полиномы Лежандра. Формула Родрига. Интеграл Шлефли.
34. Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра. Ортогональность полиномов Лежандра. Ряд Фурье-Лежандра. Присоединенные функции Лежандра.
35. Сферические функции. Производящая функция полиномов Эрмита. Формула Родрига.
36. Рекуррентные соотношения для полиномов Эрмита. Ортогональность полиномов Эрмита. Ряд Фурье-Эрмита.
37. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны методом Фурье.
38. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрической системе координат.
39. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в полярных координатах.

40. Решение задачи об остывании цилиндра методом Фурье.
41. Разделение переменных в уравнениях Лапласа и Гельмгольца в сферических координатах. Решение задачи об остывании шара методом Фурье.
42. Разделение переменных в уравнении Шредингера. Линейный гармонический осциллятор. Ротатор. Движение электрона в кулоновском поле.
43. Понятие о нелинейных уравнениях математической физике.
44. Метод конечных разностей для решения задачи Дирихле.
45. Метод конечных разностей для уравнения теплопроводности.

20.3 Перечень практических заданий

1	$u_t = u_{xx} + \exp(t)\sin 2x$	$u(x,0) = \sin 3x + \pi + 3x$	$u(0,t) = \pi$ $u(\pi,t) = 4\pi$
2	$u_t = u_{xx} + \exp(t)\cos 2x - 2$	$u(x,0) = 2\cos 3x + x^2 - \pi x$	$u_x(0,t) = -\pi$ $u_x(\pi,t) = \pi$
3	$u_t = u_{xx} + \exp(3t)\sin\frac{3x}{2}$	$u(x,0) = 3\sin\frac{x}{2} + 2\pi + \pi x$	$u(0,t) = 2\pi$ $u_x(\pi,t) = \pi$
4	$u_t = u_{xx} + \exp(3t)\cos\frac{x}{2}$	$u(x,0) = 2\cos\frac{3x}{2} - 2\pi x + 2\pi^2 -$ $-\pi$	$u_x(0,t) = -2\pi$ $u(\pi,t) = -\pi$
5	$u_t = u_{xx} + \exp(t)\sin 5x$	$u(x,0) = \sin x + 3\pi - 2x$	$u(0,t) = 3\pi$ $u(\pi,t) = \pi$
6	$u_t = u_{xx} + \exp(t)\cos 3x + 2$	$u(x,0) = \cos x - x^2 + \pi x$	$u_x(0,t) = \pi$ $u_x(\pi,t) = -\pi$
7	$u_t = u_{xx} + \exp(t)\sin\frac{x}{2}$	$u(x,0) = \sin\frac{3x}{2} + 4\pi + \pi x$	$u(0,t) = 4\pi$ $u_x(\pi,t) = \pi$
8	$u_t = u_{xx} + \exp(2t)\cos\frac{3x}{2}$	$u(x,0) = \cos\frac{x}{2} + 3x - 2\pi$	$u_x(0,t) = 3$ $u(\pi,t) = \pi$
9	$u_{tt} = u_{xx} + \sin t \sin 2x$	$u(x,0) = \sin 3x + \pi + 3x$ $u_t(x,0) = 0$	$u(0,t) = \pi$ $u(\pi,t) = 4\pi$
10	$u_{tt} = u_{xx} + \cos t \cos 2x - 2$	$u(x,0) = 2\cos 3x + x^2 - \pi x$ $u_t(x,0) = 0$	$u_x(0,t) = -\pi$ $u_x(\pi,t) = \pi$

11	$u_{tt}=u_{xx}+\sin t\sin\frac{3x}{2}$	$u(x,0)=3\sin\frac{x}{2}+2\pi+\pi x$ $u_t(x,0)=0$	$u(0,t)=2\pi$ $u_x(\pi,t)=\pi$
12	$u_{tt}=u_{xx}+\cos 3t\cos\frac{x}{2}$	$u(x,0)=2\cos\frac{3x}{2}-2\pi x+2\pi^2-$ $-\pi$ $u_t(x,0)=0$	$u_x(0,t)=-2\pi$ $u(\pi,t)=-\pi$
13	$u_{tt}=u_{xx}+\sin t\sin 5x$	$u(x,0)=\sin x+3\pi-2x$ $u_t(x,0)=0$	$u(0,t)=3\pi$ $u(\pi,t)=\pi$
14	$u_{tt}=u_{xx}+\cos t\cos 3x+2$	$u(x,0)=\cos x-x^2+\pi x$ $u_t(x,0)=0$	$u_x(0,t)=\pi$ $u_x(\pi,t)=-\pi$
15	$u_{tt}=u_{xx}+\sin t\sin\frac{x}{2}$	$u(x,0)=\sin\frac{3x}{2}+4\pi+\pi x$ $u_t(x,0)=0$	$u(0,t)=4\pi$ $u_x(\pi,t)=\pi$
16	$u_{tt}=u_{xx}+\cos 2t\cos\frac{3x}{2}$	$u(x,0)=3x-2\pi$ $u_t(x,0)=\cos\frac{x}{2}$	$u_x(0,t)=3$ $u(\pi,t)=\pi$
17	$u_{tt}=u_{xx}+\sin t\sin 2x$	$u(x,0)=\pi+3x$ $u_t(x,0)=\sin 3x$	$u(0,t)=\pi$ $u(\pi,t)=4\pi$
18	$u_{tt}=u_{xx}+\cos t\cos 2x-2$	$u(x,0)=x^2-\pi x$ $u_t(x,0)=2\cos 3x$	$u_x(0,t)=-\pi$ $u_x(\pi,t)=\pi$
19	$u_{tt}=u_{xx}+\sin 3t\sin\frac{3x}{2}$	$u(x,0)=2\pi+\pi x$ $u_t(x,0)=3\sin\frac{x}{2}$	$u(0,t)=2\pi$ $u_x(\pi,t)=\pi$
20	$u_{tt}=u_{xx}+\cos 3t\cos\frac{x}{2}$	$u(x,0)=-2\pi x+2\pi^2-\pi$ $u_t(x,0)=2\cos\frac{3x}{2}$	$u_x(0,t)=-2\pi$ $u(\pi,t)=-\pi$
21	$u_{tt}=u_{xx}+\sin t\sin 5x$	$u(x,0)=3\pi-2x$ $u_t(x,0)=\sin x$	$u(0,t)=3\pi$ $u(\pi,t)=\pi$

20.4 Тестовые задания.

Текущая аттестация № 1

1. Решение задачи Коши для волнового уравнения методом Даламбера. Полубесконечная струна. Закрепленный и свободный край.
2. Решения краевых задач для волнового уравнения методом Фурье. Случай закрепленных концов струны.

Текущая аттестация № 2

1. Вывод уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.
2. Характеристики и условия на характеристиках для двумерной системы уравнений акустики.

20.5 Перечень заданий для контрольных работ.

Контрольно-измерительный материал № 1.

1. Решить уравнение:
$u_t = 2\Delta u, 0 \le r \le 3, t \in (0, \infty), u(r, 0) = 9 - r^2, u(3, t) = 0$;

2. Найти общее решение параболического уравнения:
$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - 2u_y = 0$.

Контрольно-измерительный материал № 2.

1. Решить уравнение:
$u_t = 4u_{xx}, x \in (0,2), t \in (0, \infty), u(x, 0) = sin^3(2\pi x) - sin(4\pi x), u(0, t) = u(2, t) = 0;$

2. Найти общее решение эллиптического уравнения:
$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0$.

21. Фонд оценочных средств

Перечень заданий для проверки сформированности компетенции:

1) тестовые задания:

1. Даны уравнения: (1): $u_{xx} + u_{xy} = u_x \cdot u$, (2): $u_t = u_{xx}$, (3): $cu_x - u_t = f(x,t)$, (4): $u_{xx} + 2u_{xy} = f(x,y,t)$, (5): $u_{xx} - u_y = u$. Какие из них являются линейными уравнениями 2-ого порядка?
   1) 1, 2, 3
   2) 1, 3
   3) 3, 4, 5
   4) 2, 4, 5

<u>**Ответ:**</u> 4

2. Даны уравнения: (1): $u_{xx} + u_{xy} = u$, (2): $u_t = u_{xx}$, (3): $cu_x + u_t = u_x^2$, (4): $u_{xx} + u_{xy} = f(x,y,t)$, (5): $u_{xx} - u_y = u_x \cdot u$. Какие из них являются нелинейными?
   1) 1, 2, 3
   2) 1, 3, 4
   3) 3, 5
   4) 2, 3, 5

<u>**Ответ:**</u> 3

3. Даны уравнения: (1): $yu_x + xu_y = u$, (2): $u_t = u_{xx} + u_x$, (3): $cu_x + u_t = u_x^2$, (4): $u_x^2 - u_t = f(x,y,t)$, (5): $u_{xx} - u_y = u_x \cdot u$. Какие из них являются уравнениями 1-ого порядка?
   1) 1, 2, 3
   2) 1, 3, 4
   3) 3, 5
   4) 2, 3, 5

<u>**Ответ:**</u> 1

4. Даны уравнения: (1): $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$, (2): $u_t=u_{xx}+u_x$, (3): $u_{xx}-u_t=xu_x$, (4): $u_x^2-u_t=f(x,y,t)$, (5): $u_{xx}-u_y=(x^2+y^2)u_x$. Какие из них являются линейными однородными уравнениями?
    1) 1, 2, 3
    2) 1, 3, 5
    3) 3, 5
    4) 2, 3, 5

Ответ: 4

5. Даны уравнения: (1): $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$, (2): $u_t=u_{xx}+u_x$, (3): $u_{xx}-u_t=xu_x$, (4): $u_x-u_{tt}=f(x,y,t)$, (5): $u_{xx}+3u_{yy}-(x^2+y^2)u_x=u$. Какие из них являются эллиптическими?
    1) 1 ,2, 3
    2) 1, 3, 5
    3) 1, 5
    4) 2, 3, 5

Ответ: 3

6. Даны уравнения: (1): $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$, (2): $u_t=u_{xx}+u_x$, (3): $u_{xx}-u_t=xu_x$, (4): $u_x-u_{tt}=f(x,y,t)$, (5): $u_{xx}-u_{yy}=(x^2+y^2)u_x$. Какие из них являются параболическими?
    1) 1, 2, 3
    2) 1, 3, 5
    3) 3, 5
    4) 2, 3, 4

Ответ: 4

7. Даны уравнения: (1): $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$, (2): $u_t=u_{xx}+u_x$, (3): $u_{xx}-u_t=xu_x$, (4): $u_x-u_{tt}=f(x,y,t)$, (5): $u_{xx}-u_{yy}=(x^2+y^2)u_x$. Какие из них являются гиперболическими?
    1) 1, 2, 3
    2) 1, 3, 5
    3) 4, 5
    4) 2, 3, 4

Ответ: 3

8. Какие из нижеперечисленных задач являются однородными начальными задачами (Коши) для гиперболического уравнения?

(1): $u_t=2u_{xx}+f(x,t), u(x,0)=\phi(x)$
(2): $u_{tt}=u_{xx}+u_x, u(x,0)=\phi(x), u_t(x,0)=\psi(x)$
(3): $3u_t=u_{xx}+u_x, u(x,0)=\phi(x)$
(4): $u_{tt}=u_{xx}+f(x,t), u(x,0)=\phi(x), u_t(x,0)=\psi(x)$
(5): $\Delta u=0, 0<x<a, 0<y<b; u(x,0)=u(x\,,b)=\phi(x), u(0,y)=u(a,y)=\psi(y)$
(6): $u_{tt}=25u_{xx}, u(x,0)=\phi(x), u_t(x,0)=\psi(x), u_t(x,0)=\psi(x), u(0,t)=u(a,t)=0$

    1) 1, 2, 3
    2) 2
    3) 4, 5
    4) 2, 3, 6

Ответ: 2

9. Какие из нижеперечисленных задач являются однородными начальными задачами (Коши) для параболического уравнения?

(1): $u_t = 2u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x)$
(2): $u_{tt} = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(3): $3u_t = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x)$
(4): $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(5): $\Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b; u(x,0) = u(x\,,b) = \phi(x), u(0,y) = u(a,y) = \psi(y)$
(6): $u_{tt} = 25u_{xx}, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u(0,t) = u(a,t) = 0$

1) 1, 2, 3
2) 2, 5
3) 3
4) 2, 3, 6

Ответ: 3

10. Какие из нижеперечисленных задач являются неоднородными начальными задачами (Коши) для гиперболического уравнения?

(1): $u_t = 2u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x)$
(2): $u_{tt} = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(3): $3u_t = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x)$
(4): $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(5): $\Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b; u(x,0) = u(x\,,b) = \phi(x), u(0,y) = u(a,y) = \psi(y)$
(6): $u_{tt} = 25u_{xx}, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u(0,t) = u(a,t) = \mu(t)$

1) 1, 2, 3
2) 4
3) 4, 5
4) 2, 3, 6

Ответ: 2

11. Какие из нижеперечисленных задач являются неоднородными начальными задачами (Коши) для параболического уравнения?

(1): $u_t = 2u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x)$
(2): $u_{tt} = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(3): $3u_t = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x)$
(4): $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(5): $\Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b; u(x,0) = u(x\,,b) = \phi(x), u(0,y) = u(a,y) = \psi(y)$
(6): $u_{tt} = 5u_{xx}, u(x,0) = \phi(x), u(0,t) = u(a,t) = \mu(t)$

1) 1, 2, 3
2) 2, 5, 6
3) 1
4) 2, 3, 4

Ответ: 3

12. Какие из нижеперечисленных задач являются однородными начально-краевыми (смешанными) задачами для гиперболического уравнения?

(1): $u_t = 2u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x), u(0,t) = u(a,t) = 0$
(2): $u_{tt} = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u(0,t) = u(a,t) = 0$
(3): $3u_t = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x)$
(4): $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(5): $\Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b; u(x,0) = u(x\,,b) = \phi(x), u(0,y) = u(a,y) = \psi(y)$
(6): $u_{tt} = 25u_{xx}, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u(0,t) = u(a,t) = \mu(t)$

1) 1, 2, 3
2) 2
3) 4, 5
4) 2, 3, 6

Ответ: 2

13. Какие из нижеперечисленных задач являются однородными начально-краевыми (смешанными) задачами для параболического уравнения?

(1): $u_t = 2u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x)$
(2): $u_{tt} = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(3): $3u_t = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x)$
(4): $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(5): $\Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b; u(x,0) = u(x\,,b) = \phi(x), u(0,y) = u(a,y) = \psi(y)$
(6): $u_{tt} = 5u_{xx}, u(x,0) = \phi(x), u(0,t) = u(a,t) = \mu(t)$

1) 1, 2, 3
2) 2, 5
3) 3
4) 2, 3, 4

Ответ: 3

14. Какие из нижеперечисленных задач являются неоднородными начально-краевыми (смешанными) задачами для гиперболического уравнения?

(1): $u_t = 2u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x)$
(2): $u_{tt} = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(3): $3u_t = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x)$
(4): $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(5): $\Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b; u(x,0) = u(x\,,b) = \phi(x), u(0,y) = u(a,y) = \psi(y)$
(6): $u_{tt} = 25u_{xx}, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u(0,t) = u(a,t) = \mu(t)$

1) 1, 2, 3
2) 4, 6
3) 4, 5
4) 2, 3, 6

Ответ: 2

15. Какие из нижеперечисленных задач являются неоднородными начально-краевыми (смешанными) задачами для параболического уравнения?

(1): $u_t = 2u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x)$
(2): $u_{tt} = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(3): $3u_t = u_{xx} + u_x, u(x,0) = \phi(x)$
(4): $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$
(5): $\Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b; u(x,0) = u(x\,,b) = \phi(x), u(0,y) = u(a,y) = \psi(y)$
(6): $u_{tt} = 5u_{xx}, u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u(0,t) = u(a,t) = \mu(t)$

1) 1, 2, 3
2) 2, 5
3) 1,6
4) 2, 3, 4

Ответ: 3

2) расчётные задачи:

1. Найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$.

Ответ: $u = x + F(y)$
Интегрируя по x, получим общее решение $u = x + F(y)$, где $F(y)$ – произвольная функция.

2. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y$, где $u = u(x, y)$.

Ответ: $u = y^3 + yF(x) + G(x)$
Интегрируя по y, получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + F(x)$. После второго интегрирования по y получаем $u = y^3 + yF(x) + G(x)$, где $F(x)$ и $G(x)$ – произвольные функции.

3. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Ответ: $F(x) + G(y)$
Интегрируя уравнение по x, имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = f(y)$. Проинтегрировав полученный результат по y, находим $u = F(y) + G(x)$, где $F(y) = \int f(y)dy$.

4. Найти решение $u(x, t)$ задачи Коши: $u_{tt} = u_{xx}, u(x, 0) = \phi(x) = x^2, u_t(x, 0) = 0$

Ответ: $u = x^2 + t^2$
Применяя формулу Д'Аламбера (скорость волн $\mathrm{c} = 1$), имеем

$$u = \frac{1}{2}[\phi(x - ct) + \phi(x + ct)] = \frac{1}{2}[(x - ct)^2 + (x + ct)^2] = x^2 + t^2.$$

5. Найти решение$u(x, t)$ задачи Коши: $u_{tt} = 4u_{xx}, u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \phi(x) = x$

Ответ: $u = xt$
Применяя формулу Д'Аламбера (скорость волн $\mathrm{c} = 2$), имеем

$$u = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi = \frac{1}{8}s^2\Big|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{2}[(x + 2t)^2 - (x - 2t)^2] = xt.$$

6. Найти решение $u(x, t)$ неоднородной задачи Коши: $u_{tt} - \mathrm{c}^2 u_{xx} = f(x, t) = sin\omega x,\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$

Ответ: $\frac{\sin(\omega x)}{\mathrm{c}^2\omega^2}[1 - \cos(x\omega t)]$
Применяя формулу Д'Аламбера для неоднородного уравнения, имеем

$$u = \frac{1}{2c}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi\, f(\xi, \tau) = \frac{1}{2c}\int_0^t d\tau \left(-\frac{cos\omega\xi}{\omega}\right)\Big|_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} =$$

$$= \frac{1}{2c\omega}\int_0^t d\tau\big[cos[\omega x - c\omega(t - \tau)] - cos[\omega x + c\omega(t - \tau)]\big]$$

$$= \frac{1}{2c\omega}\int_0^t d\tau 2\sin(\omega x)\sin[c\omega(t - \tau)] = \frac{\sin(\omega x)}{c\omega}\ \frac{\cos[c\omega(t - \tau)]}{c\omega}\Big|_0^t = \frac{\sin(\omega x)}{c^2\omega^2}[1 - \cos(x\omega t)].$$